

 Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

PHẦN I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.**
- D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của $y = f(x)$.

Câu 2: [Mức độ 1] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

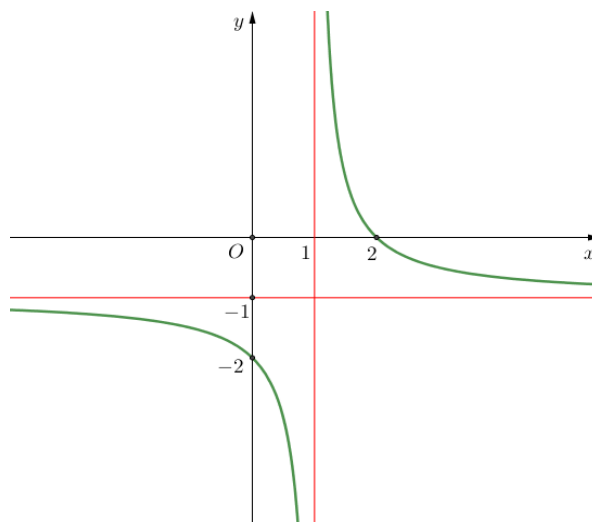
- A. $y = -2$
- B. $x = -1$
- C. $x = 2$
- D. $y = 1$**

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 3: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là

A. $y = -1$

B. $x = 1$

C. $x = 0$

D. $y = 1$

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận ngang $y = -1$

Câu 4: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

A. 1

B. 4

C. 2

D. 3.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Câu 5: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng phân biệt.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng

Lời giải

Ta thấy: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$.

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là $x = -2$.

Câu 6: [Mức độ 1] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-3}$ là

A. $x = 3$

B. $x = -3$

C. $x = -1$

D. $x = 1$

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x-3} = -\infty$. Suy ra tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$.

Câu 7: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3x-1}{x+1}$ là:

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

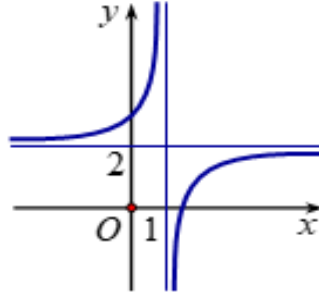
Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = +\infty$.

Vậy tiệm cận đứng là: $x = -1$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận đứng của đồ thị là



A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Vậy tiệm cận đứng là: $x = 1$.

Câu 9: Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = a$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = b$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa của tiệm cận xiên.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng:

A. $y = x$.

B. $y = x - 1$.

C. $y = 2x - 1$

D. $y = x + 1$.

Lời giải

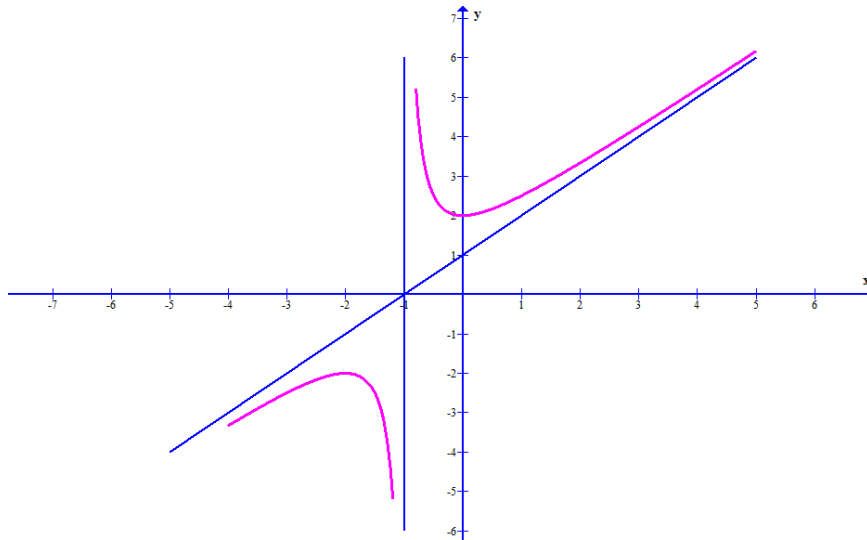
Chọn D

Ta có: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$

Vậy tiệm cận xiên là: $y = x + 1$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng:



A. $y = x$.

B. $y = x - 1$.

C. $y = 2x - 1$

D. $y = x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy tiệm cận xiên là: $y = x + 1$.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ có mấy đường tiệm cận xiên:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = 1$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = -1$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận xiên là: $y = x + 1$ và $y = -x - 1$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$ (C).

a) Tiệm cận đứng của hàm số là $x = \frac{3}{2}$.

b) Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận thuộc đường thẳng $x - y - 1 = 0$

c) Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ cắt TCD, TCN của hàm số tại các điểm A và B. Diện tích của tam giác IAB bằng $\frac{25}{4}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận.

d) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

a) Đúng

Vì $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} \frac{x-1}{2x-3} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của hàm số là $x = \frac{3}{2}$.

b) Đúng.

Hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = \frac{3}{2}$ và 1 tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$, nên tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Rõ ràng I thuộc đường thẳng $x - y - 1 = 0$.

c) Sai.

Tọa độ điểm A: $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -2$ suy ra $A\left(\frac{3}{2}; -2\right)$

Tọa độ điểm B: $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ suy ra $B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$\overline{IA}\left(0; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow IA = \frac{5}{2}$; $\overline{IB}\left(-\frac{5}{4}; 0\right) \Rightarrow IB = \frac{5}{4}$; $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$

d) Đúng.

Tọa độ giao điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $\left(x_0; \frac{x_0-1}{2x_0-3}\right)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số tại

điểm $\left(x_0; \frac{x_0-1}{2x_0-3}\right)$ là:

$$y = -\frac{1}{(2x_0-3)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-1}{2x_0-3} \Leftrightarrow x + (2x_0-3)^2 y - 2x_0^2 + 4x_0 - 3 = 0.$$

$$\text{Khi đó: } d(I, \Delta) = \frac{\left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2x_0 - 3)^2 - 2x_0^2 + 4x_0 - 3 \right|}{\sqrt{1 + (2x_0 - 3)^4}} = \frac{|-2x_0 + 3|}{\sqrt{1 + (2x_0 - 3)^4}} \leq \frac{|2x_0 - 3|}{\sqrt{2(2x_0 - 3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(Theo bất đẳng thức Cô si)

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } (2x_0 - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 3 = 1 \\ 2x_0 - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max d(I, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 4x + 3 + m}{x - 2}$ (C).

a) Khi $m = 0$, tiệm cận đứng của hàm số là $x = 2$.

b) Khi $m = 0$, tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng đồ thị và đường thẳng $x - y - 1 = 0$ thuộc parabol: $y = x^2$

c) Khi $m = 0$, lấy M là điểm bất kỳ trên đồ thị (C), gọi d_1 là khoảng cách từ M đến đường tiệm cận tiệm cận đứng, gọi d_2 là khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x + 2$. Tích $d_1 \cdot d_2 = 7$

d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số không có tiệm cận đứng. Số phần tử của S là 1.

Lời giải

a) Đúng

$$\text{Khi } m = 0 \text{ hàm số có dạng } y = \frac{-x^2 + 4x + 3}{x - 2}$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{-x^2 + 4x + 3}{x - 2} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (2)^-} \frac{-x^2 + 4x + 3}{x - 2} = -\infty \text{ nên tiệm cận đứng của hàm số là } x = 2.$$

b) Sai.

$$\text{Khi } m = 0 \text{ hàm số có dạng } y = \frac{-x^2 + 4x + 3}{x - 2}$$

Tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng và đường thẳng $x - y - 1 = 0$ là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x = 2 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn phương trình parabol } y = x^2.$$

c) Sai.

Ta thấy $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $-2^2 + 4 \cdot 2 + 3 \neq 0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

$$\text{Lấy } M\left(0; -\frac{3}{2}\right) \in (C). \text{ Ta có } d_1 \cdot d_2 = \frac{|-2|}{1} \cdot \frac{\left|-\frac{3}{2} - 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

d) Sai.

Hàm số không có tiệm cận đứng khi $x=2$ là nghiệm của phương trình $-x^2+4x+3+m=0$

Hay $-4+8+3+m=0 \Leftrightarrow m=-7$. Vậy $S=\emptyset$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$ (C).

a) Khi $m \neq 0$, hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

b) Khi $m=0$, tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận thuộc đường thẳng $x-y-2=0$.

c) Hàm số có 1 tiệm cận đứng khi $m=2$

d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên âm của $m \in [-5; -1]$ để hàm số có ba đường tiệm cận. Số phần tử của S là 1.

Lời giải

a) Đúng

Khi $m \neq 0$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{mx^2-2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{m - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 0$ nên hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

b) Đúng.

Khi $m=0$ hàm số có dạng $y = \frac{x-1}{-2x+3}$

Hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = \frac{3}{2}$ và 1 tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$, nên tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Rõ ràng I thuộc đường thẳng $x-y-2=0$.

c) Sai.

Khi $m=2$ thì hàm số thành $y = \frac{x-1}{2x^2-2x+3}$ không có tiệm cận đứng vì $2x^2-2x+3=0$ vô nghiệm

d) Sai.

Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow mx^2-2x+3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ m.1^2 - 2.1 + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{3} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vì $m \in [-5; -1]$ nên $S = \{-5; -4; -3; -2\}$

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ (C).

a) Khi $m=0$, hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

b) Khi $m=0$, hàm số có 3 tiệm cận.

d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của $m \in [-8; 8]$ để hàm số có ba đường tiệm cận. Số phần tử của S là 7.

a) Đúng

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$ nên hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

Hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x=0$; $x=2$ và 1 tiệm cận ngang là $y=1$, nên hàm số có 3 tiệm cận.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2+m=0 \\ 4+4+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \\ f(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases}.$$

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn (Thí sinh trả lời từ câu 01 đến câu 06)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	4	-1	3	2

Biết đồ thị hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x} - x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = a$ và $y = b$, trong đó $a < b$. Tính $S = a - 100b$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 1$ và $f(1) = 3$, suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 3$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 2$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 3$. Suy ra $a = 2, b = 3$.

Suy ra $S = a - 100b = -298$.

Đáp án: -298

Câu 18: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 150x + 900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của t .

Lời giải.

Chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{150x + 900}{x}$.

Ta có $f'(x) = \frac{-900}{x^2} < 0 \forall x > 0$.

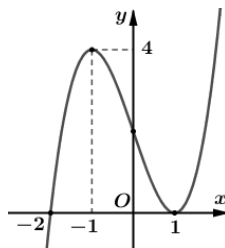
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{150x + 900}{x} = 150$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	150

Vậy khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 150 nghìn đồng.

Đáp án: 150

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x^2 - 1) - 4}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Từ đồ thị, ta có $a > 0$.

Ta có $f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \alpha \ (\alpha > 1) \end{cases}$ trong đó $x = -1$ là nghiệm kép.

Suy ra $f(x) - 4 = a(x+1)^2(x-\alpha)$.

Do đó $f(x^2-1) - 4 = ax^4(x^2-1-\alpha)$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x^2-1)-4} = \frac{\sqrt{x}}{ax^4(x^2-1-\alpha)} = \frac{1}{ax^3\sqrt{x}(x-\sqrt{1+\alpha})(x+\sqrt{1+\alpha})}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ax^3\sqrt{x}(x-\sqrt{1+\alpha})(x+\sqrt{1+\alpha})} = -\infty$ nên $x = 0$ là một đường tiệm cận

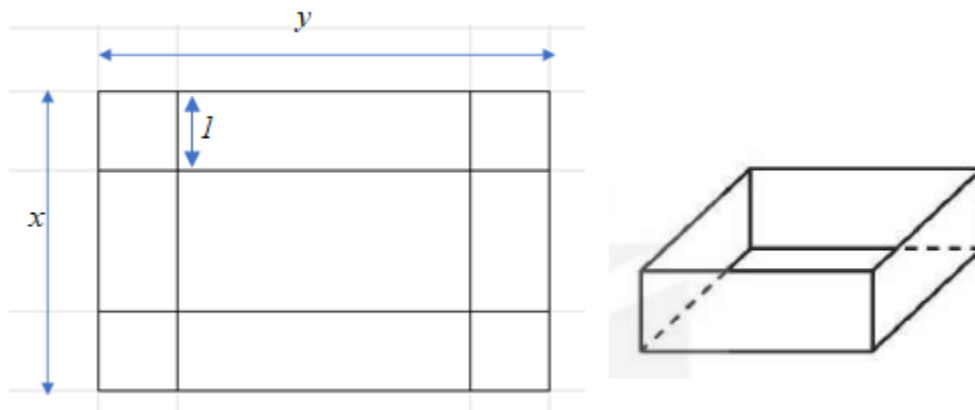
đứng của đồ thị $y = g(x)$.

Đường thẳng $x = \sqrt{1+\alpha}$ cũng là một đường tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Đáp án: 2

Câu 20: [Mức độ 4] Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 2$ và $y > 2$ và diện tích bằng $10m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $1m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(2; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

Do tấm tôn có diện tích bằng $10m^2$ nên $xy = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{x}$

Thùng có chiều cao là $1m$ và các kích thước còn lại của thùng là: $x-2$ và $y-2$

$$\text{Thể tích của thùng là } V(x) = 1 \cdot (x-2)(y-2) = (x-2) \left(\frac{10}{x} - 2 \right) = \frac{(x-2)(10-2x)}{x}$$

$$\text{Suy ra: } y = \frac{1}{V(x)} = \frac{x}{(x-2)(10-2x)}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{(x-2)(10-2x)} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(x-2)(10-2x)} = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{đường thẳng } x=2 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số } y = \frac{1}{V(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x}{(x-2)(10-2x)} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{(x-2)(10-2x)} = +\infty$$

$$\Rightarrow \text{đường thẳng } x=5 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số } y = \frac{1}{V(x)}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 21: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. Ta có:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$

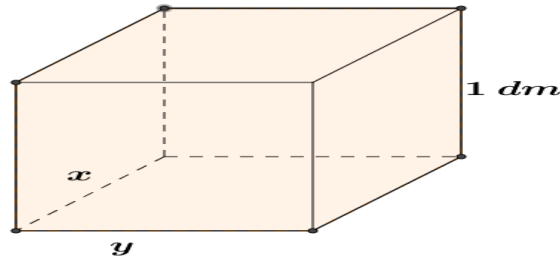
$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x}) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 - x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y = 3x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận xiên.

Câu 22: [Mức độ 4]. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $5m^3$. Chiều cao của bể là $10dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Lời giải

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $1 \cdot xy = 5 \Leftrightarrow xy = 5$

Diện tích toàn phần của bể là $S(x) = xy + 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot y = 5 + 2x + \frac{10}{x}$, ($x > 0$)

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (5 + 2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x} = 0$

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = 2x + 5 \Rightarrow a = 2; b = 5$

$$P = a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29$$

•Đề 2:

Câu 1: [Mức độ 1] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

A. $y = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $y = 2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 2$.

Câu 2: [Mức độ 1] Tiệm cận đứng của đồ thị số hàm số $y = \frac{4x^2 - x + 1}{3x + 2}$ là đường thẳng

A. $x = \frac{2}{3}$.

B. $x = \frac{4}{3}$.

C. $x = -\frac{2}{3}$.

D. $x = -\frac{3}{2}$.

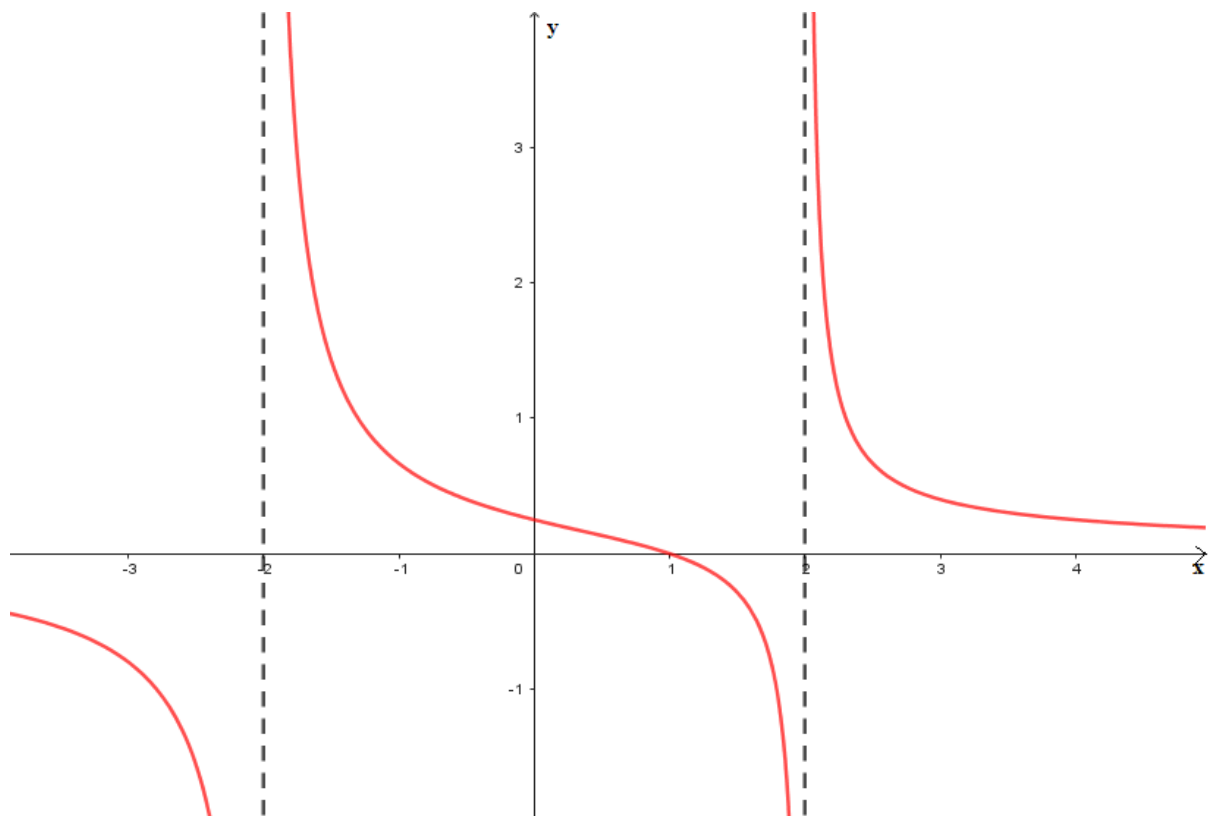
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^-} y = -\infty$.

Suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -\frac{2}{3}$.

Câu 3: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng

A. $y = 0$.

B. $x = 2$ và $x = -2$.

C. $x = 0$.

D. $y = 2$ và $y = -2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = -\infty$.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.

Câu 4: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2		2

$\nearrow -\infty$
 $\searrow +\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$

B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $y=2$.

Lời giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1-\infty} y = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=2$.

Câu 5: [Mức độ 1] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3-2x}{x+1}$ là

A. $x=-2$.

B. $y=-2$.

C. $y=-1$.

D. $x=-1$.

Lời giải

GV phản biện: Nguyễn Thủy

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 2}{1 + \frac{1}{x}} = -2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} - 2}{1 + \frac{1}{x}} = -2$.

Nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 6: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	0	2	$-\infty$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3.

B. 1.

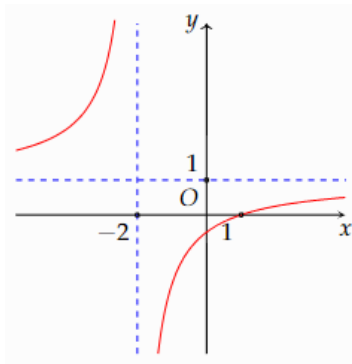
C. 2.

D. 4.

Lời giải

Dựa vào BBT ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng nên tổng số có 3 đường tiệm cận.

Câu 7: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $x = 1$.

B. $y = -2$.

C. $x = -2$.

D. $y = 1$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 8: [Mức độ 2] Đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau có đường tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$.

B. $y = x^3 - 3x$.

C. $y = \log_2 x$.

D. $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$.

Lời giải

Đáp án A: Xét hàm số $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ có tập xác định $D = [0; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{x}} = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ không có tiệm cận ngang.

Đáp án B: Xét hàm số $y = x^3 - 3x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$. Do đó đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ không có tiệm cận ngang.

Đáp án C: Xét hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$. Do đó đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ không có tiệm cận ngang.

Đáp án D: Xét hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 4}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{4}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = 0.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Câu 9: [Mức độ 1] Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận xiên?

A. $y = x^2$.

B. $y = x^3 - 3x + 4$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Lời giải

Hàm số đa thức bậc hai và ba không có tiệm cận nên loại phương án A và B.

Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ chỉ có tiệm cận đứng và ngang nên loại phương án C.

Ta có: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0.$$

Vậy hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có tiệm cận xiên $y = x$.

Câu 10: [Mức độ 2] Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ là:

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = 2 - x$.

D. $y = x - 1$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1} = x + 2 - \frac{1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0.$$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là: $y = x + 2$.

Câu 11: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$. Tọa độ giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. $(-2; 3)$.

B. $(2; 1)$.

C. $(2; -1)$.

D. $(3; 2)$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2} = -x + 1 + \frac{1}{x - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 2} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - 2} \right) = 0.$$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = -x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2} = -\infty.$$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $(2; -1)$.

Câu 12: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 16}{x}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng

A. 8.

B. 16.

C. 4.

D. 12.

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + 4x + 16}{x} = x + 4 + \frac{16}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{x} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 4)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{16}{x} \right) = 0$$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên: $y = x + 4$.

Tọa độ giao điểm của đường tiệm cận xiên với hai trục tọa độ là : $A(0;4), B(-4;0)$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Câu 13: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) Với $m = -1$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Với $m = 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x - 1$.
- c) Với $m = 2$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.
- d) Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

a) Đúng

Với là $m = -1$ ta có: $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

b) Sai

Với là $m = 0$ ta có: $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \Leftrightarrow y = x + 3 + \frac{2}{x - 1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 3$.

c) Sai

Với $m = 2$, ta có: $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 1} \Leftrightarrow y = 3x + 5 + \frac{4}{x - 1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = 3x + 5$.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt hai trục tọa độ tại 2 điểm $A(0;5)$, $B\left(-\frac{5}{3};0\right)$.

Diện tích tam giác OAB là $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$.

d) Đúng

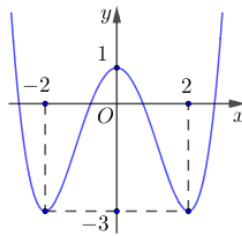
Với $m=1$ ta có $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x - 1} (C)$, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $d_1 : x = 1$, tiệm cận xiên là $d_2 : y = 2x + 4$.

Gọi $M\left(x; \frac{2x^2 + 2x - 1}{x - 1}\right) \in (C)$ khi đó $d(M; d_1) = |x - 1|$; $d(M; d_2) = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot |x - 1|}$

Khi đó $d(M; d_1) \cdot d(M; d_2) = |x - 1| \cdot \frac{3}{\sqrt{5} \cdot |x - 1|} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 14: [Mức độ 3] Cho hàm số trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Xét

hàm số $y = g(x) = \frac{x^2 - 2x}{(f(x))^2 + 2f(x) - 3}$.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 6.
- b) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đúng một tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.
- d) Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 4.

Lời giải

a) Đúng. b) Đúng c) Sai d) Sai

Ta có $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ là hàm số trùng phương nên bậc của mẫu là 8.

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x}{(f(x))^2 + 2f(x) - 3} = 0$.

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Ta có $(f(x))^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\text{TH1: } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{nghiêm kép}) \\ x = x_1 (x_1 < -2) \\ x = x_2 (x_2 > 2) \end{cases}$$

$$\text{P } f(x) - 1 = ax^2(x - x_1)(x - x_2).$$

$$\text{TH2: } f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 (\text{nghiêm kép}) \\ x = -2 (\text{nghiêm kép}) \end{cases}$$

$$\text{P } f(x) + 3 = a(x - 2)^2(x + 2)^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= \frac{x^2 - 2x}{(f(x))^2 + 2f(x) - 3} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(f(x) - 1)(f(x) + 3)} \\ &= \frac{x(x - 2)}{ax^2(x - x_1)(x - x_2)a(x - 2)^2(x + 2)^2} \\ &= \frac{1}{a^2x(x - x_1)(x - x_2)(x - 2)(x + 2)^2} \end{aligned}$$

Suy ra đồ thị h/s $g(x)$ có 5 TCD là: $x = 0, x = x_1, x = x_2, x = \pm 2$.

Đó đó tổng số tiệm cận ngang và đứng là 6.

Câu 15: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = \frac{2x + m}{mx - 3}$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

- a) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Với $m = 3$ thì điểm $A(1; 2)$ thuộc tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- c) Với $m = 1$ thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 9.
- d) Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng 7.

Lời giải

- a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng.

Đồ thị hàm số (C_m) $y = \frac{2x + m}{mx - 3}$ có điều kiện $x \neq \frac{3}{m}$. Với $m \neq 0$ thì hàm số có TCD $x = \frac{3}{m}$ và TCN $y = \frac{2}{m}$.

- a) Với $m = -1$ thì hàm số có TCD $x = -3$ và TCN $y = -2$. Vậy mệnh đề a) sai.

b) Với $m=3$ thì hàm số có dạng $y = \frac{2x+3}{3x-3}$ và có TĐĐ $x=1$ nên điểm $A(1;2)$ thuộc tiệm cận đứng.

c) Với $m=1$ thì hàm số có dạng $y = \frac{2x+1}{x-3}$. Khi đó đồ thị có TĐĐ $x=3$ và TCN $y=2$; cùng với hai trục tọa độ là $x=0, y=0$ tạo thành hình chữ nhật có độ dài cạnh 2 và 3. Suy ra diện tích hình chữ nhật là 6.

d) Với $m=1$ thì hàm số có dạng $y = \frac{2x+1}{x-3}$, điểm $M\left(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0-3}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Đồ thị có TĐĐ là $x=3$ và TCN là $y=2$; Khoảng cách từ M đến hai tiệm cận lần lượt là:

$$d_1(M; TĐĐ) = |x_0 - 3| \text{ và } d_2(M; TCN) = \left| \frac{2x_0+1}{x_0-3} - 2 \right|. \text{ Khi đó:}$$

$$T = d_1(M; TCN).d_2(M; TCN)$$

$$= |x_0 - 3| \left| \frac{2x_0+1}{x_0-3} - 2 \right|$$

$$= |2x_0 + 1 - 2x_0 + 6| = 7$$

Câu 16: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1-x}$ (1), với m là tham số. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

a) Với $m=-1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên đi qua $M(2; -3)$.

b) Với $m=1$ thì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là $\frac{1}{2}$.

c) Với $m=1$ thì tâm đối xứng của đồ thị là điểm $I(1; -2)$.

d) Với $m=1$ thì tiệm cận xiên, tiệm cận đứng cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình thang vuông có diện tích bằng 3.

Lời giải

a) Sai

b) Sai

c) Đúng

d) Sai.

Ta có: $y = -x - m + \frac{m^2 - m + 1}{1-x}$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x - m)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m^2 - m + 1}{x-1} = 0$ nên đường thẳng $(d): y = -x - m$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1).

a) Với $m=-1$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $(d): y = -x + 1$, Thay $x=2$ vào (d) ta được $y = -1$ nên điểm $M(2; -3)$ không thuộc tiệm cận xiên.

b) Tiệm cận xiên $(d): y = -x - m$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; -m)$ và $B(-m; 0)$

$$\text{Diện tích tam giác } OAB: S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |y_A| \cdot |x_B| = \frac{1}{2} m^2.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

c) Với $m=1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $(d): y = -x - 1$ và tiệm cận đứng $x = 1$ cắt nhau tại điểm $I(1; -2)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

d) Với $m=1$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $(d): y = -x - 1$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; -1)$ và $B(-1; 0)$, Tiệm cận xiên và tiệm cận đứng $x = 1$ cắt nhau tại điểm $I(1; -2)$.
Tiệm cận đứng cắt trục Ox tại $C(1; 0)$ Khi đó ta có hình thang vuông $OAIC$ có diện tích là $\frac{3}{2}$.

Câu 17: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		-	+	-	+
y	5		$+\infty$	$+\infty$	2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0; 10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{f(x) - m + 2}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

Lời giải

Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) \geq 1$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{f(x) - m + 2}$ có hai đường tiệm cận ngang có phương trình là $y = \frac{5}{7 - m}$

$$\text{và } y = \frac{2}{4 - m}.$$

$$\text{Xét phương trình } f(x) - m + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 2 \quad (*)$$

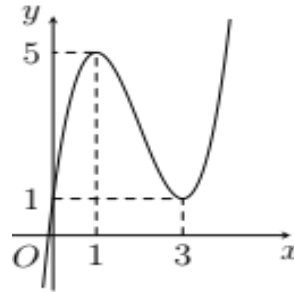
Để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt suy ra

$$\begin{cases} 1 < m - 2 < 2 \\ m - 2 = 3 \\ m - 2 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m < 4 \\ m = 5 \\ m \geq 7 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 10] \Rightarrow m \in \{5; 7; 8; 9; 10\}.$$

Đáp án: 5

Câu 18: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2020}{f^2(x) - 2(m+1) \cdot f(x) + 5(2m-3)}$ có đúng 6 đường tiệm cận.

Lời giải

Đáp án: 1

$$\text{Điều kiện: } f^2(x) - 2(m+1) \cdot f(x) + 5(2m-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 5 \\ f(x) \neq 2m-3 \end{cases}$$

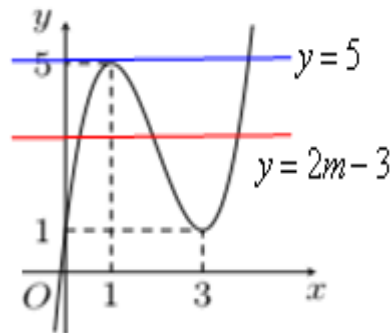
+) Tiệm cận ngang:

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ là đa thức bậc 3 nên $f^2(x)$ là đa thức bậc 6, do đó

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x^2 + 2020}{f^2(x) - 2(m+1) \cdot f(x) + 5(2m-3)} = 0 \Rightarrow \text{Đường thẳng } y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ}$$

thị hàm số $g(x)$.

+) Tiệm cận đứng:



Ta có: $x^4 - x^2 + 2020 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f^2(x) - 2(m+1) \cdot f(x) + 5(2m-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 5 \\ f(x) = 2m-3 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f(x) = 5$ có 2 nghiệm. Suy ra, đồ thị có 2 tiệm cận đứng.

Do đó:

Đồ thị hàm số có đúng 6 tiệm cận.

$$\Leftrightarrow f(x) = 2m - 3 \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2m - 3 < 5 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

$$\Rightarrow m = 3 \text{ (vì } m \text{ là số nguyên).}$$

Câu 19: [Mức độ 4] Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{(m-1)x^2-2mx-6}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2025; 2025]$ để đồ thị hàm số có đúng 3 đường tiệm cận?

Lời giải

Trường hợp 1: $m = 1$ ta có hàm số $y = \frac{2x+4}{-2x-6}$ có 2 đường tiệm cận là đường thẳng $x = -3$ và $y = -1$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m \neq 1$

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{(m-1)x^2-2mx-6}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{(m-1)x^2-2mx-6}$ có 3 đường tiệm cận thì phương trình $(m-1)x^2 - 2mx - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 + 6m - 6 > 0 \\ (m-1) \cdot (-2)^2 - 2m \cdot (-2) - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \begin{cases} m > -3 + \sqrt{15} \\ m < -3 - \sqrt{15} \end{cases} \\ 8m - 10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \begin{cases} m > -3 + \sqrt{15} \\ m < -3 - \sqrt{15} \end{cases} \\ m \neq \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 - \sqrt{15} \\ \begin{cases} m > -3 + \sqrt{15} \\ m \neq 1 \end{cases} \\ m \neq \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3 - \sqrt{15}) \cup (-3 + \sqrt{15}; 1) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$$

Mà m nhận giá trị nguyên trên đoạn $[-2025; 2025]$ nên ta có m nguyên thỏa mãn $-2025 \leq m \leq -7$ hoặc $2 \leq m \leq 2025$.

Số các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:
 $(-7 + 2025 + 1) + (2025 - 2 + 1) = 4043$

Vậy có 4043 giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 20: [Mức độ 4] Gọi S là tập hợp các số nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2+4x+m}$ có đúng 3 đường tiệm cận. Tổng giá trị các phần tử của tập S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: -9.

Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + 4x + m \neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2+4x+m} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty; 1]$.

Ta có: $x^2 + 4x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = -m$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = x^2 + 4x$:

x	$-\infty$		-2		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-4		5

Phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty; 1] \Leftrightarrow -4 < -m \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq m < 4$.

$\Rightarrow S = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy tổng giá trị các phần tử của tập S bằng -9.

Câu 21: [Mức độ 3] Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Lời giải

Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang ($x > 0$). Ta có :

Đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h = \frac{2S}{x+2x} = \frac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P(x) = x + \frac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = 3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x}$ (tập xác định $D = (0; +\infty)$).

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[3 + \sqrt{1 + \frac{256}{x^4}} + \frac{16}{x^2} \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$+ \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left[3x^2 + \sqrt{x^4 + 256} + 16 \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{256}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 22: [Mức độ 3] Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường nào.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{10^8}{x} + 2000 - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{10^8}{x} \right] = 0$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = x + 2000$. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường $y = x + 2000$.

• Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 24. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: [Mức độ 1] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ là:

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -2$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty.$$

Vậy đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy chọn đáp án **A**.

Câu 2: [Mức độ 1] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ là:

A. $y = 1$.

B. $y = 2$.

C. $y = -3$.

D. $y = -2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

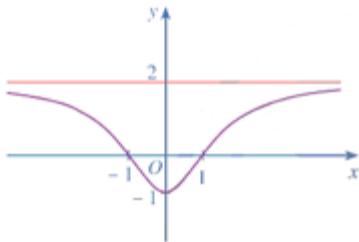
$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{5}{x-1} \right) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{5}{x-1} \right) = 2.$$

Vậy đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy chọn đáp án **B**.

Câu 3: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y = \log_3 x$.

B. $y = e^x$.

C. $y = \frac{2x^2 - x + 3}{x + 1}$.

D. $y = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có:

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên đáp án A, C bị loại.

+) Tiệm cận ngang $y = 2$ nên đáp án B bị loại.

$$\text{Vì: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ là TCN của đồ thị hàm số } y = e^x.$$

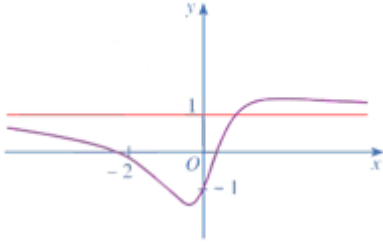
+) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ vì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{6}{x^2 + 2} \right) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{6}{x^2 + 2} \right) = 2.$$

Vậy chọn đáp án **D**.

Câu 4: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y = \frac{x^2 - x + 7}{x^2 - 4}.$

B. $y = \frac{2x^2 - x + 3}{x + 5}.$

C. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}.$

D. $y = \frac{x + 4}{x - 3}.$

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có:

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên đáp án A, B, D bị loại.

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 1$ vì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x - 2}{x^2 + 1} \right) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2x - 2}{x^2 + 1} \right) = 1.$$

Vậy chọn đáp án **C**.

Câu 5: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x - 3}{2 - x}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $y = \frac{5}{2}.$

B. $y = -5.$

C. $x = -5.$

D. $x = 2.$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -5 \Rightarrow y = -5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 8}{x + 2}$ có hai đường tiệm cận.

A. $m \neq 4.$

B. $m \neq -4.$

C. $m = 4.$

D. $m = -4.$

Lời giải

Ta có $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow m(-2)-8 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$, tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

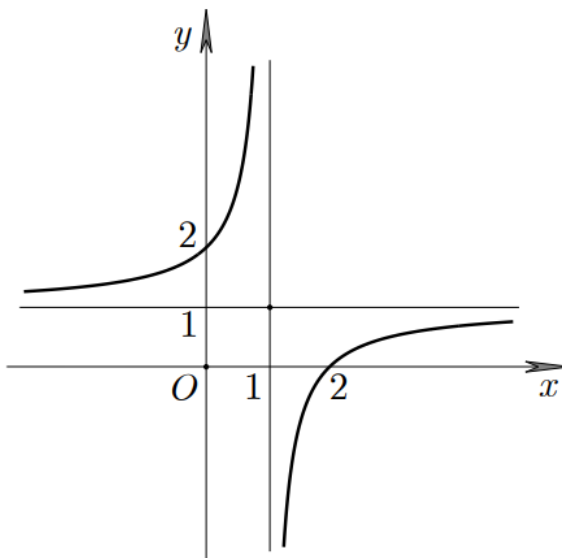
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$ nên đường

thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0; ac \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.



A. $x=1, y=1$.

B. $x=-1, y=1$.

C. $x=1, y=2$.

D. $x=2, y=1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta suy ra

- Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x=1$.

- Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y=1$.

Câu 9: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{2x-2}$

A. $x = 1.$

B. $x = 2.$

C. $x = \frac{1}{2}.$

D. $x = -3.$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{2x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{2x-2} = -\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Câu 10: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+5}{2x+4}$

A. $x = -2.$

B. $x = 1.$

C. $x = \frac{1}{2}.$

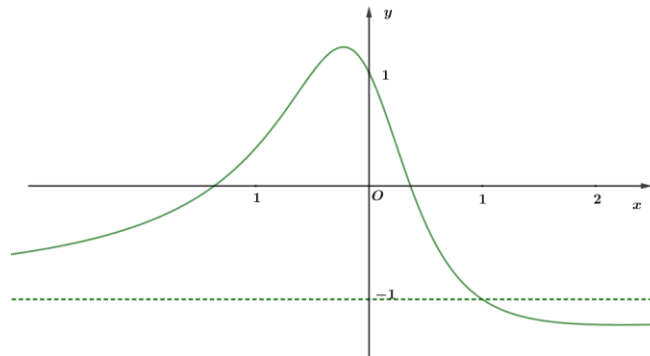
D. $x = -\frac{5}{2}.$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x+5}{2x+4} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+5}{2x+4} = -\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$.

Câu 11: Cho đồ thị hàm số có hình vẽ như dưới, đường thẳng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường có nét đứt. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau



A. $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x + 1}.$

B. $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{-2x^2 - 1}.$

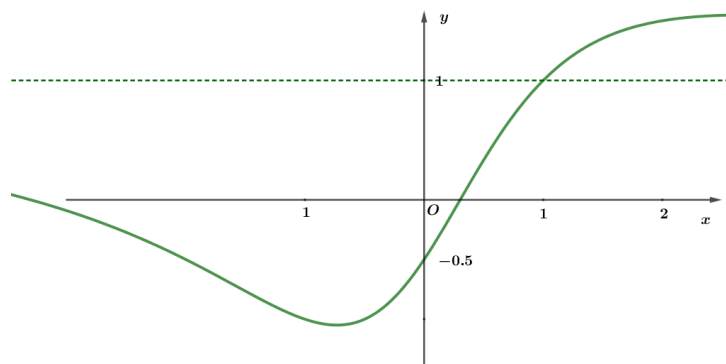
C. $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x - 1}.$

D. $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{-2x^2 + 1}.$

Lời giải

Ta có Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = -1$, và đi qua điểm $(0;1)$, suy ra đó là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{-2x^2 - 1}.$

Câu 12: Cho đồ thị hàm số có hình vẽ như dưới, đường thẳng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường có nét đứt. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau



A. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}$.

C. $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 1}$.

D. $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 1}$.

Lời giải

Ta có Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 1$, và đi qua điểm $(0; -0.5)$, suy ra đó là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $x = -1$
- c) Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 2
- d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải

a) Đúng

Có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$. Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$

b) Sai

Có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$. Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$

c) Đúng

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = -1$. Vậy tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 2.

d) Sai

Hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	4	6

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=6$
- c) Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 2
- d) Tổng số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ là 1

Lời giải

a) Sai

Có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Vậy đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

b) Đúng

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=6$

c) Sai

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang $y=6$. Vậy tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 1.

d) Sai

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = \frac{1}{8}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{8}$ và $y=0$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘ -3	$+\infty$ ↘ 2	2 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↗ 10	10 ↗ $-\infty$

Xét tính đúng – sai của các phát biểu sau:

- a) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y=10$.
- b) Một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $x=-3$.
- c) Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 3.
- d) Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$ là 4.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x)$. Từ bảng biến thiên ta có:

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 10$.

+) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

+) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

Từ đó: **a)** Đúng; **b)** Sai; **c)** Đúng.

Xét hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$. Đặt $g(x) = \frac{1}{2f(x)+6}$, ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2; a\}$, trong đó $f(a) = -3$ và $a \in (2; +\infty)$. Khi đó ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 6} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 6} = \frac{1}{26} \text{ nên } y = 0 \text{ và } y = \frac{1}{26} \text{ là}$$

hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác ta có

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) + 6} = +\infty \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 6} = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ không là tiệm cận đứng;}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \frac{1}{2 \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + 6} = +\infty \Rightarrow x = a \text{ là tiệm cận đứng;}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+6}$ có 4 đường tiệm cận.

Từ đó: **d)** Đúng.

Câu 16: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ với tham số m . Xét tính đúng – sai của các phát biểu sau:

a) Với mọi m đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ không tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

b) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

c) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

d) Có ba giá trị của m đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

+) Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3} = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$ với mọi m

Từ đó: **a) Sai; b) Đúng.**

+) Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + x - 2}$.

Xét $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$. Vì $x = 1$ cũng là nghiệm của tử thức nên đồ thị hàm số y chỉ nhận $x = -2$ là tiệm cận đứng. Nên mệnh đề **c)** Sai.

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có đúng hai đường tiệm cận.

U Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng.

U Phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \\ 1 - (2m+1) + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m^2 - 3) = 0 \\ (2m+1)^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{13}{4} \\ m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài. Nên mệnh đề **d)** Đúng.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2025; 2025]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$$
 có đúng hai đường tiệm cận đứng?

Đáp án:

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $f(x) = x^2+2(m-1)x+m^2-2=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt khác 1

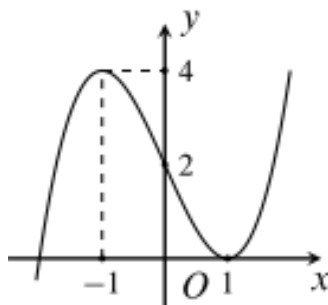
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2-2) > 0 \\ 1+2(m-1)+m^2-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+3 > 0 \\ m^2+2m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2025; 2025] \end{cases}$ nên $m \in \{-2025, -2024, \dots, -4, -2, -1, 0\}$

Vậy có 2025 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Đáp án: 2025

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $y = f(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Đáp án:.....

Lời giải

$$\text{Xét } f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases}$$

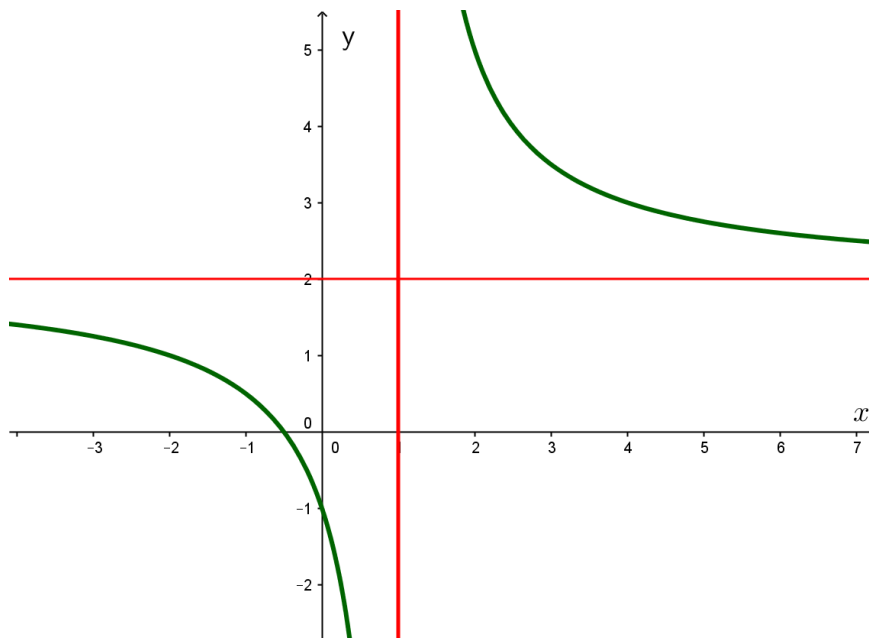
- Xét $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < -1$ và $x_2 = 1$ là nghiệm bội 2 (do đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$). Trường hợp này đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng.

- Xét $f(x) = 4$ có 2 nghiệm $x_3 > 1$ và $x_4 = -1$ là nghiệm bội 2 (do đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$). Trường hợp này đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Đáp án: 4

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a \neq 0; c \neq 0; ad - bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

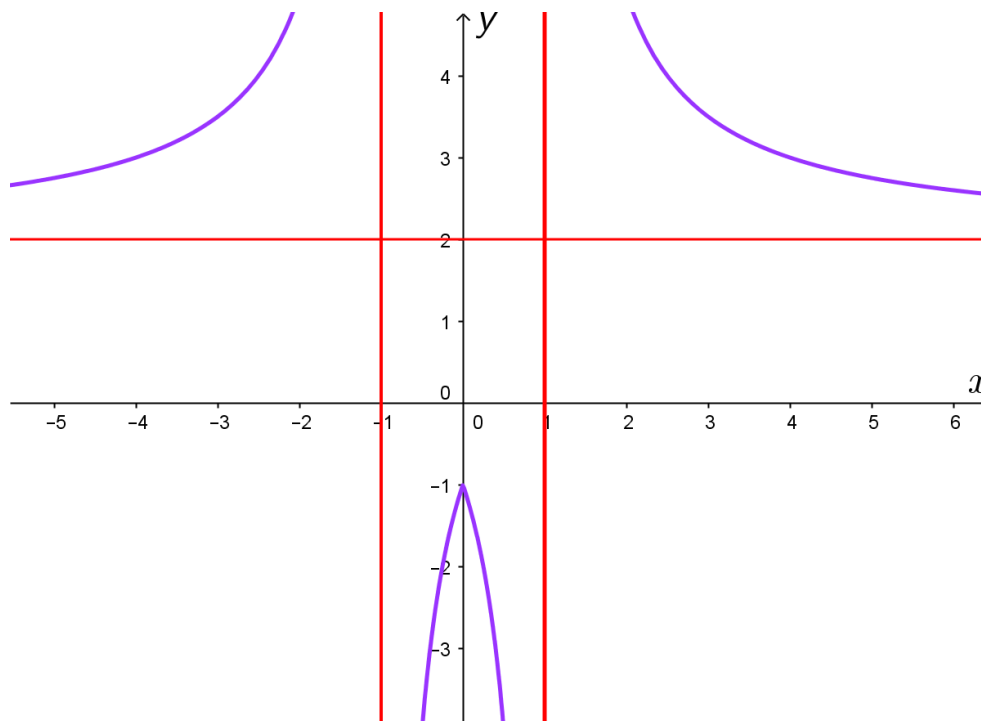


Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận?

Đáp án:.....

Lời giải

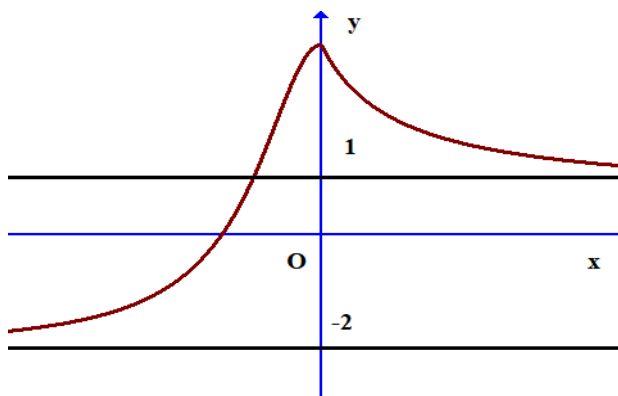
Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục Oy , phần đồ thị phía bên trái trục Oy bỏ đi, rồi lấy đối xứng phần đồ thị phía bên phải sang qua Oy . Ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ bên dưới.



Vậy đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có tổng số 3 đường tiệm cận

Đáp án: 3

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



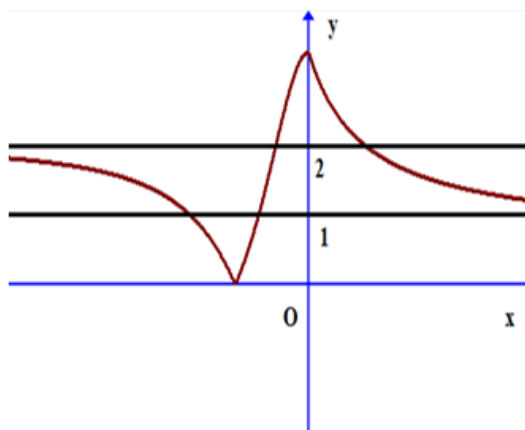
Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 2 tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$. Tính $m + n$?

Đáp án:.....

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được vẽ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục Ox , phần đồ thị phía dưới trục Ox thì lấy đối xứng lên qua Ox , rồi bỏ phần đồ thị phía dưới Ox đi.

Ta có đồ thị hàm $y = |f(x)|$ như hình vẽ.



Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = 2$.

Vậy $m + n = 2 + 1 = 3$.

Đáp án: 3

Câu 21: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}$ là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Trả lời: 2.

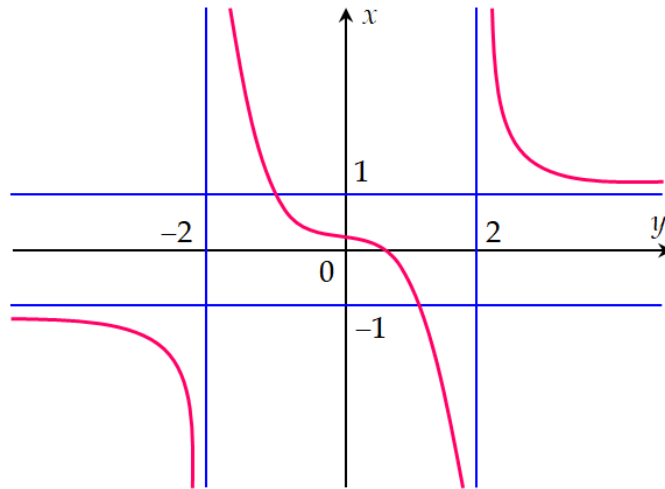
Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)} = -\frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x = 2$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2}{3f(x) - 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Trả lời:.....

Lời giải

Trả lời: 3.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot (-1) - 2} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot 1 - 2} = 2$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

$$\text{Xét phương trình } 3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 23: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Trả lời: 1.

$$\text{Ta có } x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{\sin 2}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x} = -\infty$$

Vậy đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng là $x = -2$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	2	1	-1	1	

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$ là

Trả lời:.....

Lời giải

Trả lời: 6.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $3f(x) - 2 = 0$ (hay $f(x) = \frac{2}{3}$) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4

thỏa $x_1 \in (-\infty; -1)$, $x_2 \in (-1; 0)$, $x_3 \in (0; 1)$, $x_4 \in (1; +\infty)$. Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$

có 4 tiệm cận đứng là $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3f(x) - 2} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3f(x)-2} = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y = 0$, $y = 2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là 6.

•Đề 4:

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = 2x + 1$.

C. $y = 2x - 3$.

D. $y = 2x + 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } y = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = 2x + 1 - \frac{1}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \mp\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{-1}{x - 2} = 0.$$

Do đó tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = 2x + 1$.

Câu 2: [Mức độ 2] Xác định tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

A. $(1; 2)$.

B. $(1; 1)$.

C. $(1; -1)$.

D. $(1; 0)$.

Lời giải

Ta có : $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và đường tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 1$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ nên giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(1; 1)$.

Câu 3: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Ta có : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$ và tiệm cận

đứng là $x = 0$.

- Câu 4:** [Mức độ 2] Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là
- A. 3. B. 2. C. 0. **D. 1.**

Lời giải

Tập xác định : $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

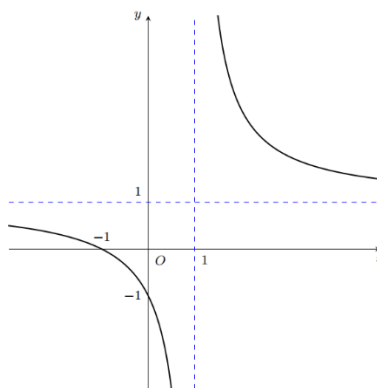
- Câu 5:** [Mức độ 1] Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là
- A. $x = 2$. **B. $y = 2$.** C. $x = 1$. D. $y = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$.

Vậy $y = 2$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

- Câu 6:** [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là



- A. $x = -1; y = 1$. B. $x = 1; y = -1$. C. $x = -1; y = -1$. **D. $x = 1; y = 1$.**

Lời giải

Dựa vào đồ thị, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là $x = 1; y = 1$

- Câu 7:** [Mức độ 1] Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$ là
- A. $y = x + 2$. **B. $y = x - 2$.** C. $y = x + 1$. D. $y = x - 1$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = x - 2 + \frac{3}{x + 1}$.

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x + 1} = 0$

Vậy $y = x - 2$ là phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$.

Câu 8: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	$-$		$+$	
y	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$	

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

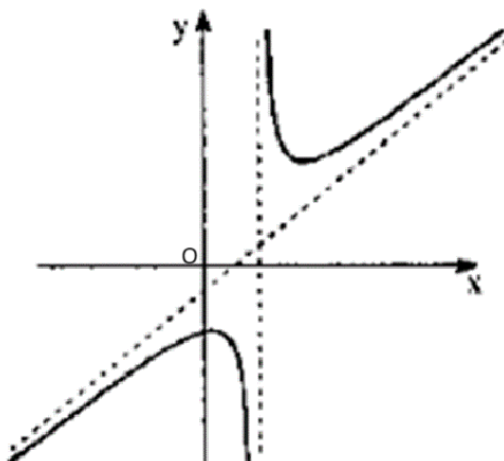
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty$ suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ suy ra đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 9: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?



A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận xiên và một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận xiên.

Lời giải

Chọn đáp án C

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên.

Câu 10: [Mức độ 2] Đồ thị hàm số nào sau đây có tiệm cận xiên:

A. $y = x^2 - 2x$. B. $y = x + 1$. C. $y = \frac{x}{x+2}$. **D. $y = \frac{x^2}{x+1}$.**

Lời giải

Chọn đáp án D

Hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = x + 1$ có đồ thị lần lượt là parabol và đường thẳng nên không có tiệm cận xiên.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x+2}$ có tiệm cận ngang là $y = 1$ nên không có tiệm cận xiên.

Vậy đáp án ta chọn là $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Câu 11: [Mức độ 2] Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$ là

A. $y = x$. **B. $y = x + 1$.** C. $y = x + 2$. D. $y = x + 3$.

Lời giải

Chọn đáp án B

Gọi phương trình đường tiệm cận xiên là $y = ax + b$.

Khi đó

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 5}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 1.$$

Vậy phương trình đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

Câu 12: [Mức độ 2] Số tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 - x + 3}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn đáp án A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Gọi phương trình đường tiệm cận xiên là $y = ax + b$.

Trường hợp 1:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 3}{\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 2\right)} = -\frac{1}{4}$$

Khi đó phương trình đường tiệm cận xiên là $y = 2x - \frac{1}{4}$.

Trường hợp 2:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x} = -2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 3}{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2\right)} = \frac{1}{4}$$

Khi đó phương trình đường tiệm cận xiên là $y = -2x + \frac{1}{4}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên.

Câu 13: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		+	-	
y	$\nearrow$ $3 \rightarrow +\infty$		$\nearrow$ $-5 \rightarrow 2$	$\searrow$ $-\infty$	

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

A. $x = 1, x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

B. $x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

C. $y=3; y=1$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

D. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là 3.

Lời giải

Dựa vào BBT, đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x=1, x=-1$, một tiệm cận ngang là $y=3$.

Do đó đáp án đúng là: $x=1, x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$; tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là 3.

Đáp án sai là $x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$; $y=3; y=1$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 14: [Mức độ 3] Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Xét hàm số $y=g(x)=f(x^2-2x-2)$. Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau:

- Hàm số $y=g(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R} \setminus \{1 \pm \sqrt{3}\}$.
- Hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.
- Hàm số $y=g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=1$.
- Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 3.

Lời giải

a) Sai.

Ta có $x^2-2x-2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Vậy hàm số $y=g(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

b) Đúng.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có:

Do $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x^2 - 2x - 2) = +\infty$ nên $x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Do $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ nên $x = 3$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng $x = -1$ và $x = 3$.

c) Sai.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2 - 2x - 2) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ không có tiệm cận ngang.

d) Sai.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x - 2)$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x = -1$; $x = 3$ và không có tiệm cận ngang.

Câu 15: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1), với m là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Khi $m = 1$ thì đồ thị hàm số của (1) không có tiệm cận ngang.
- Khi $m = 1$ thì đồ thị hàm số của (1) có tiệm cận đứng là $y = -3$.
- Khi $m = 1$ thì đồ thị hàm số của (1) có tiệm cận xiên là $y = x - 2$.
- Khi góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng 45° thì $m = 2$.

Lời giải

Khi $m = 1$ ta có $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = x - 2 + \frac{4}{x + 3}$.

a. Đúng

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số của (1) không có tiệm cận ngang.

b. Sai

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số của (1) có tiệm cận đứng là $x = -3$.

c. Đúng

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 2 + \frac{4}{x + 3} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 3} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = x - 2$.

d. Sai

Ta có $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m} = mx - 2 + \frac{6m - 2}{x + 3m}$.

Gọi (C_m) là đồ thị hàm số của (1).

(C_m) có tiệm cận đứng $d_1: x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0$ và tiệm cận xiên $d_2: y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0 \left(m \neq \frac{1}{3}; m \neq 0 \right)$.

Ta có: $\cos 45^\circ = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (nhận).

Câu 16: [Mức độ 3] Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2 + (3 - m)x + m^2 - 2}{x - 1}$, với m là tham số. Gọi

(d) là đường tiệm cận xiên của (C) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Khi $m = 2$ thì (d) có phương trình là $y = 2x + 3$.
- Khi $m = 1$ thì (d) đi qua $A(1; 4)$.
- Có 2 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 9.
- Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$ thì $m = \sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $y = mx + 3 + \frac{m^2 + 1}{x - 1}$, do đó (C) có tiệm cận xiên là $(d): y = mx + 3 (m \neq 0)$.

a Đúng.

Với $m = 2$ thì (d) có phương trình là $y = 2x + 3$.

b Đúng.

Ta có $A(1; 4) \in (d) \Leftrightarrow 4 = m + 3 \Leftrightarrow m = 1$. (nhận)

c Đúng.

Giao điểm của (d) với hai trục tọa độ là $M(0; 3); N\left(-\frac{3}{m}; 0\right)$.

Diện tích tam giác vuông OMN là $S = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left| \frac{3}{m} \right| = \frac{9}{2|m|}$

Ta có $S = 9 \Leftrightarrow \frac{9}{2|m|} = 9 \Leftrightarrow |m| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$. (nhận)

Vậy có 2 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 9.

d. Sai

Ta có $d(O; (d)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{2}$.

Câu 17: [Mức độ 3] Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

Lời giải

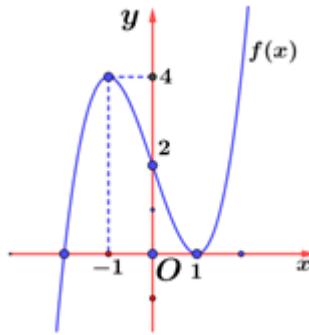
Đáp số: 14.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Đồ thị của hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 8x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - m > 0 \\ m - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m \neq 7 \end{cases}.$

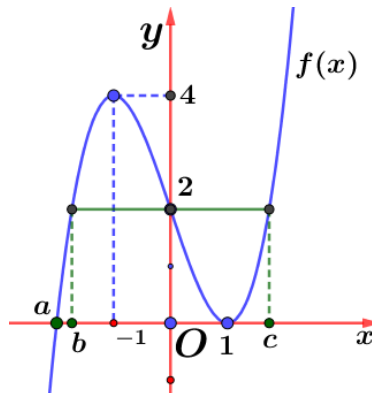
Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1; 2; 3; \dots; 6; 8; \dots; 15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 18: [Mức độ 4] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}.$



Lời giải

Ta có: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}.$



Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:

(1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép) $\Rightarrow f(x) = k(x-a)(x-1)^2$ ($k \neq 0$)

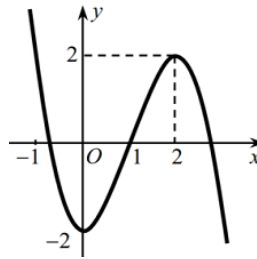
(2) có nghiệm ba nghiệm đơn x_3, x_4, x_5 với $x_3 = b < -1 < x_4 = 0 < 1 < x_5 = c$
 $\Rightarrow f(x) - 2 = m(x-b)x(x-c) \ (m \neq 0)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$

Tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ mẫu của $g(x)$ nhận giá trị bằng 0 còn tử nhận các giá trị dương. Và do hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{a; b; 0; 1; c\}$ nên giới hạn một bên của hàm số $y = g(x)$ tại các điểm $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$ là các giới hạn vô cực. Do đó, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 tiệm cận đứng, đó là các đường thẳng $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 tiệm cận đứng $x = a, x = b, x = 0, x = 1, x = c$.

Câu 19: [Mức độ 4] Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

Lời giải

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{f(x)}$.

Đồ thị hàm số có một TCN $y = 0$ và ba tiệm cận đứng nên $m = 0$ không thỏa mãn.

TH2: $m < 0$

Đồ thị hàm số không có TCN

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = m$ có nghiệm, trong đó có đúng hai nghiệm thỏa mãn $1 + mx^2 \geq 0$.

Mà m là số nguyên nên dựa vào đồ thị ta chỉ cần xét $m \in \{-2; -1\}$.

+ Với $m = -2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{1-2x^2}}{f(x)+2}$. Khi đó $f(x) = -2$ có hai nghiệm $x_1 = 0; x_2 = a > 2$. Nghiệm x_2 không

thỏa mãn điều kiện $1 - 2x^2 \geq 0$ nên $m = -2$ không thỏa mãn

+ Với $m = -1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{f(x)+1}$ Khi đó $f(x) = -1$ có hai nghiệm $x_1 = b \in (-1; 0); x_2 = c \in (0; 1)$. Cả hai

nghiệm đều thỏa mãn điều kiện $1 - x^2 \geq 0$ nên $m = -1$ thỏa mãn.

TH3: $m > 0$. Khi đó $1 + mx^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số có một TCN $y = 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = m$ có đúng một nghiệm $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2$.

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-100; 100] \Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [3; 100] \cup \{-1\} \end{cases}$ nên có 99 giá trị.

Đáp số : 99.

Câu 20: [Mức độ 4] Cho hàm số $y = \frac{10 + \sqrt{6x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm số giá trị nguyên của tham số m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x^2 - 4x + 2m > 0 \end{cases}$$

Ta có $10 + \sqrt{6x - x^2} \neq 0 \forall x$ nên để (C_m) có hai tiệm cận đứng thì phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 2m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m = 0 (*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 6]$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' = 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Giả sử 2 nghiệm phân biệt của $(*)$ là $x_1 < x_2$. Ta có $0 \leq x_1 < x_2 \leq 6$.

$$\text{Theo định lí Vi-et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ (x_1 - 6)(x_2 - 6) \geq 0 \\ (x_1 - 6) + (x_2 - 6) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 - 6(x_1 + x_2) + 36 \geq 0 \\ (x_1 + x_2) - 12 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 0 \\ 4 \geq 0 \\ 2m - 24 + 36 \geq 0 \\ 4 - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $0 \leq m < 2$ và m nguyên suy ra $m \in \{0; 1\}$ là giá trị cần tìm.

Đáp số : 2.

Câu 21: [Mức độ 3] Người ta thống kê được chi phí sửa chữa, vận hành máy móc trong một năm của một xưởng sản xuất được tính bởi công thức $f(x) = \frac{2000x - 1500}{35x + 5}$ (triệu đồng). Biết x là số năm kể từ lúc máy móc vận hành lần đầu tiên, số năm càng nhiều thì chi phí càng cao. Khi số năm x đủ lớn thì chi phí vận hành máy móc trong một năm gần với số nào? (làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000x - 1500}{35x + 5} = \frac{2000}{35} = \frac{400}{7}.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $y = \frac{400}{7}$ làm tiệm cận ngang, tức là khi số năm x càng lớn thì chi phí vận hành máy móc trong một năm càng tiến gần đến $\frac{400}{7} \approx 57,1$ (triệu đồng).

Câu 22: [Mức độ 3] Để thiết kế một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 80 cm, thể tích là 12800 cm³. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m². Gọi x là chiều dài của đáy bể cá với ($x > 0, x(m)$); $f(x)$ là hàm số xác định chi phí để hoàn thành bể cá. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$

Lời giải

Gọi y là chiều rộng của đáy bể cá ($y > 0, y(m)$).

$$\text{Ta có : } 0,8xy = 0,0128 \Rightarrow y = \frac{0,016}{x}(m).$$

Giá thành bể cá được xác định theo hàm số:

$$f(x) = 2.0,8 \left(x + \frac{0,016}{x} \right) \cdot 70000 + 100000 \cdot x \cdot \frac{0,016}{x} \text{ (VNĐ)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 112000 \left(x + \frac{0,016}{x} \right) + 1600 \text{ (VNĐ)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 112000x + 1600 + \frac{1792}{x} \text{ (VNĐ)}.$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(112000x + 1600 + \frac{1792}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (112000x + 1600)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1792}{x} = 0$$

Nên đồ thị hàm $f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 0$; tiệm cận xiên là $y = 112000x + 1600$.

•Đề 5:

PHẦN I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12 Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.

Lời giải

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án **D**.

Câu 2: [**Mức độ 1**] Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{5x-16}$?

A. $y = \frac{1}{5}$.

B. $x = \frac{1}{5}$.

C. $y = \frac{16}{5}$.

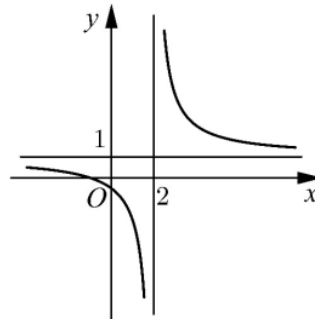
D. $x = \frac{16}{5}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{16}{5} \right\}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{5x-16} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{5-\frac{16}{x}} = \frac{1}{5}$.

Vậy đường thẳng $y = \frac{1}{5}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 3: [**Mức độ 1**] Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là:

A. $y = 2$.

B. $x = 2$.

C. $y = 1$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn **C**.

Câu 4: [**Mức độ 1**] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	—		—		—
y	$-2 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -1 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 2$	

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 0

B. 1.

C. 2

D. 4.

Lời giải

Chọn C vì nhìn bảng biến thiên thấy ngay đồ thị có tiệm cận ngang $y = -2$ và $y = 2$.

- Câu 5:** [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[2;9)$ và có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = -\infty$. Tìm khẳng định đúng.
- A.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$.
- B.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- C.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận.
- D.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 9$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Lời giải

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số ta chọn đáp án **A.**

- Câu 6:** [Mức độ 1] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:

- A.** $y = -\frac{1}{2}$. **B.** $x = -\frac{1}{2}$. **C.** $y = \frac{1}{2}$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x+1}{2x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x+1}{2x-1} = -\infty$.

Vậy đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

- Câu 7:** [Mức độ 1] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$ là

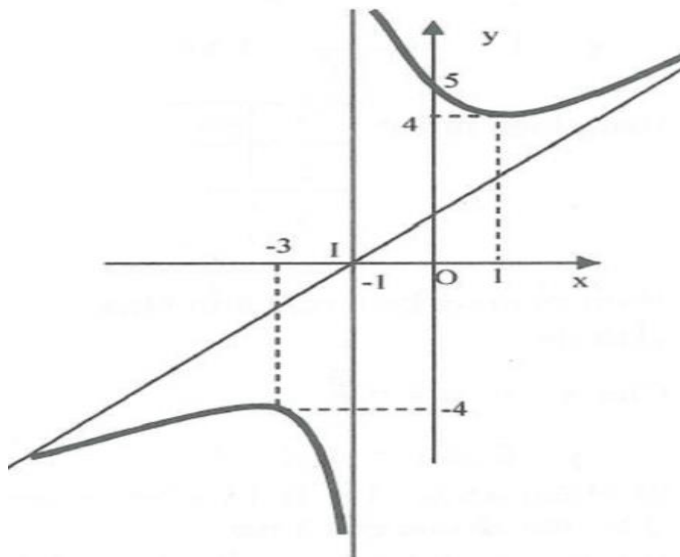
- A.** $x = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2} = -\infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn **B.**

- Câu 8:** [Mức độ 1] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng

- A. $y = -4$. B. $x = 1$. **C. $x = -1$.** D. $y = 4$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn C.

Câu 9: [**Mức độ 1**] Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = a$.
- B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax + b) = 0$**
- C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = b$.
- D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) - ax + b) = 0$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10: [**Mức độ 1**] Cho hàm số $y = 2x - 1 + \frac{1}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

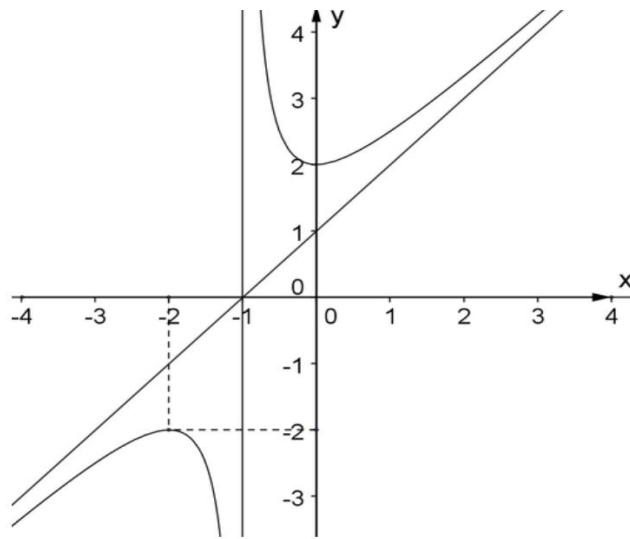
- A. $x = 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = x - 1$. **D. $y = 2x - 1$**

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{2x - 1} - (2x - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x - 1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn D.

Câu 11: [**Mức độ 1**] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x = 2$.

B. $y = x - 2$.

C. $y = x - 1$.

D. $y = x + 1$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 12: [Mức độ 2] Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2) \cdot (2x + 1)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{2x + 1}{x + 2}$

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x - 2) \cdot (2x + 1)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 1}{x + 2} = 2$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 2$.

Do $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x - 2) \cdot (2x + 1)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x + 1}{x + 2} = -\infty$ và

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x - 2) \cdot (2x + 1)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x + 1}{x + 2} = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm

số là đường thẳng $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13: [ĐS] Cho hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 2}$ có đồ thị là (C).

a) **[NB]**. Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

b) **[TH]**. Đồ thị (C) nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

c) **[VD]**. Đường thẳng đường thẳng $d: y = x - 1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có độ dài bằng $4\sqrt{5}$.

d) **[VDC]**. Gọi M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C) . Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 2$. Vậy câu a) đúng.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm 2 đường tiệm cận là $x = 2$ và $y = 1$ là tâm đối xứng. Dẫn đến $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị (C) . Vậy câu b) sai.

c) Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+2}{x-2} = x-1 \ (x \neq 2) \Leftrightarrow x+2 = (x-1)(x-2)$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ x=4 \Rightarrow y=3 \end{cases}$. Từ đó, $A(0;-1), B(4;3)$. Dẫn đến $AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Vậy câu c) sai.

d) Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; 1 + \frac{4}{x_0 - 2}\right)$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1 = |x_0 - 2|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang: $d_2 = |y_0 - 1| = \left|1 + \frac{4}{x_0 - 2} - 1\right| = \frac{4}{|x_0 - 2|}$.

$$d_1 + d_2 = |x_0 - 2| + \frac{4}{|x_0 - 2|} \geq 2\sqrt{|x_0 - 2| \cdot \frac{4}{|x_0 - 2|}}$$

$\Rightarrow \min(d_1 + d_2) = 4 \Leftrightarrow |x_0 - 2| = \frac{4}{|x_0 - 2|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$. Vậy câu d) đúng.

Câu 14: **[ĐS]** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

a) **[NB]**. Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

b) **[TH]**. Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

c) **[VD]**. Trên đồ thị (C) tồn tại đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

d) [VDC]. Giả sử đường thẳng $(d_m): y = mx - m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời tam giác ABC vuông tại đỉnh $C(-2; 0)$. Khi đó, tổng tất cả các giá trị của tham số m tìm được bằng 9.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$. Vậy câu a) đúng.

b) Ta có $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \Leftrightarrow y = x + 3 + \frac{2}{x - 1}$. Suy ra

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(x + 3 + \frac{2}{x - 1} \right) - (x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 1} = 0 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + 3 + \frac{2}{x - 1} \right) - (x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 1} = 0. \text{ Dẫn đến } y = x + 3 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị}$$

(C) . Vậy câu b) sai.

c) $M(x; y) \in (C): y = x + 3 + \frac{2}{x - 1}$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2 \mid (x - 1) \end{cases}$. Từ đó

$$\begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \\ x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 7 \\ x = -1; y = 1 \\ x = 2; y = 7 \\ x = 0; y = 1 \end{cases}. \text{ Dẫn đến đồ thị } (C) \text{ có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên. Vậy câu}$$

c) đúng.

d) Phương trình hoành độ $mx - m = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \ (x \neq 1) \Leftrightarrow (m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (m + 1)^2 - (m - 1)(m + 1) > 0 \\ m - 1 - 2(m + 1) + 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -1 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -1 \end{cases}.$$

Gọi $A(x_1; mx_1 - m)$, $B(x_2; mx_2 - m)$

Ta có $\overline{CA} = (x_1 + 2; mx_1 - m)$, $\overline{CB} = (x_2 + 2; mx_2 - m)$. Do tam giác ABC vuông tại C nên

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2) \cdot (x_2 + 2) + (mx_1 - m) \cdot (mx_2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + m^2 [x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + 1}{m - 1} + 4 \cdot \frac{m + 1}{m - 1} + 4 + m^2 \left(\frac{m + 1}{m - 1} - 2 \cdot \frac{m + 1}{m - 1} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2m^2 + 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{9 + \sqrt{89}}{4}(n) \\ m_2 = \frac{9 - \sqrt{89}}{4}(n) \end{cases}. \text{ Suy ra } m_1 + m_2 = \frac{9}{2}. \text{ Vậy câu d) sai.}$$

Câu 15: [ĐS] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+6}$ có đồ thị (C).

a) [NB]. Hàm số đồng biến trên khoảng (0;1)

b) [TH]. Hàm số đạt cực đại tại $x = -4$.

c) [VD]. Với $m = \frac{3}{8}$ thì đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $d : (2m+3)x + my + 2 = 0$.

d) [VDC]. Có 2024 giá trị nguyên của tham số $m \in [-2; 2028]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1) + m^2$ lớn hơn 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$a) y = \frac{x+1}{x^2-2x+6}.$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x^2-2x+6-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x+6)^2} \Leftrightarrow y' = \frac{-x^2-2x+8}{(x^2-2x+6)^2}.$$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	0			$\frac{1}{2}$	
		$-\frac{1}{10}$			0

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 2)$. Vậy câu a) đúng.

b) Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. Vậy câu b) sai.

$$c) y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4; y = \frac{-1}{10} \\ x = 2; y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $A\left(-4; \frac{-1}{10}\right)$ và $B\left(2; \frac{1}{2}\right)$ là $(\Delta): x - 10y + 3 = 0$. Theo giả thiết, do $d \perp \Delta$ nên $1 \cdot (2m + 3) - 10 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$. Vậy câu c) đúng.

d) Đặt $t = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1 \Leftrightarrow t = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) + 1 \Leftrightarrow t = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$;
 $t \in [-1; 3]$. Ta có

$$g(t) = f(t) + m^2 = \frac{t+1}{t^2-2t+6} + m^2, t \in [-1; 3] \Rightarrow g'(t) = \frac{-t^2-2t+8}{(t^2-2t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4(l) \\ t = 2(n) \end{cases}. \text{ Ta}$$

tính được $g(-1) = m^2$, $g(2) = \frac{1}{2} + m^2$, $f(3) = \frac{4}{9} + m^2$. Do đó $\max_{[-1; 3]} f(t) = m^2 + \frac{1}{2}$. Theo giả

thiết, $m^2 + \frac{1}{2} > 5 \Leftrightarrow m^2 > \frac{9}{2} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$. Kết hợp với m là số nguyên

và $m \in [-2; 2028]$ ta suy ra có 2026 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy câu d) sai.

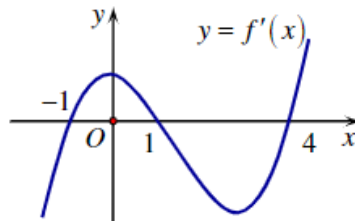
Câu 16: [ĐS] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5}$ có đồ thị (C) .

a) [NB]. Đồ thị (C) có 1 đường tiệm cận đứng.

b) [TH]. Đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x$.

c) [VD]. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(6 - 4\sin^2 x)$. Khi đó $77M + 2m = 3\sqrt{5} - 2$.

d) [VDC]. Cho hàm số $y = g(x)$. Hàm số $y = g'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Đặt $h(x) = g\left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5}\right)$. Khi đó hàm số $y = h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận đứng và $x = -1$ và $x = -5$. Vậy câu a) sai.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 - 5x^2 - 11x + 5}{x^2 + 6x + 5} = +\infty$ và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 5x^2 - 11x + 5}{x^2 + 6x + 5} = -\infty$. Dẫn đến $y = x$ không là tiệm cận xiên

của đồ thị (C). Vậy câu b) sai.

c) Đặt $t = 6 - 4\sin^2 x \Rightarrow 2 \leq t \leq 6$. Từ đó $y = \frac{t^2 - 6t + 5}{t^2 + 6t + 5}$, với $t \in [2; 6]$.

Ta có $y' = \frac{12t^2 - 60}{(t^2 + 6t + 5)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{5} \text{ (l)} \\ t = \sqrt{5} \text{ (n)} \end{cases}$

$y(2) = \frac{-1}{7}, y(\sqrt{5}) = \frac{3\sqrt{5} - 7}{2}, y(6) = \frac{5}{77}$. Suy ra $M = \frac{5}{77}; m = \frac{3\sqrt{5} - 7}{2}$ hay

$77M + 2m = 3\sqrt{5} - 2$. Vậy câu c) đúng.

d) $h(x) = g\left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5}\right) \Rightarrow h'(x) = \frac{12x^2 - 60}{(x^2 + 6x + 5)^2} \cdot g'\left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5}\right)$

Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12x^2 - 60}{(x^2 + 6x + 5)^2} = 0 \text{ (1)} \\ g'\left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5}\right) = 0 \text{ (2)} \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 12x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g'(x)$ ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} = -1 \text{ (3)} \\ \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} = 1 \text{ (4)} \\ \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} = 4 \text{ (5)} \end{cases}$

Giải (3): $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} = -1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = -x^2 - 6x - 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 10 = 0$ (vô nghiệm)

Giải (4): $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (n)}.$

Giải

(5):

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 6x + 5} = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 4x^2 + 24x + 20 \Leftrightarrow 3x^2 + 30x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 2\sqrt{5} \text{ (n)} \\ x = -5 - 2\sqrt{5} \text{ (n)} \end{cases}$$

Dẫn đến hàm số $y = h(x)$ có 5 điểm cực trị. Vậy câu d) đúng.

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn (Thí sinh trả lời từ câu 01 đến câu 06)

Câu 17: [Mức độ 3] Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -3$	$\nearrow 1$	$\searrow +\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{f(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(b2) \\ x = -2(b2) \end{cases}.$$

Do $f(x)$ là hàm số bậc bốn có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên

$$f(x) - 1 = a(x + 2)^2(x - 2)^2 \quad (a < 0).$$

$$\text{Khi đó, } g(x) = \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{a(x + 2)^2(x - 2)^2} = \frac{1}{a(x + 2)}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a(x + 2)} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a(x + 2)} = 0$, nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang.

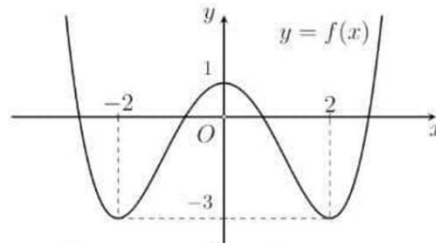
Câu 18: [Mức độ 4] Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t}\right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right) = 200 \cdot \frac{2}{3} = \frac{400}{3} \Rightarrow a = 400; b = 3$

Vậy $P = a - 2b = 400 - 6 = 394$

Câu 19: [Mức độ 3] Cho hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$?

Lời giải

Xét tử: $(x^2 - 4)(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (b1) \\ x = 2 (b1) \\ x = -2 (b2) \end{cases} \quad (*)$

Xét mẫu: $[f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases}$

Với $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (b2) \\ x = a < -2 (b1) \\ x = b > 2 (b1) \end{cases}$

Với $f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 (b2) \\ x = -2 (b2) \end{cases}$

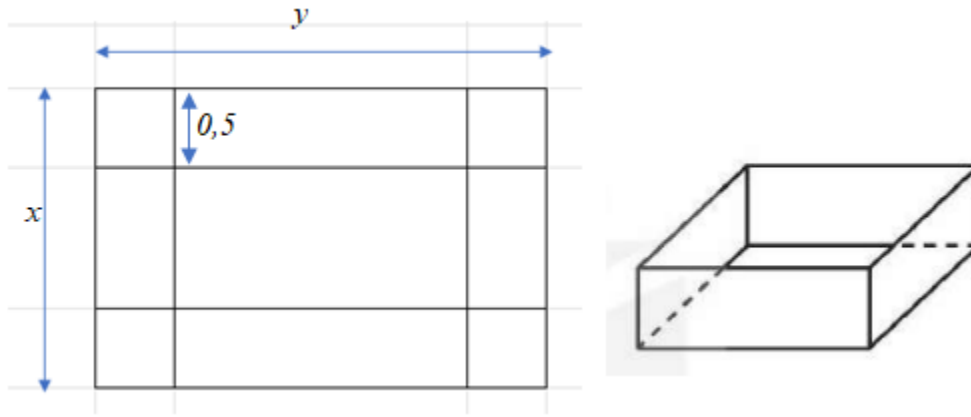
$\Rightarrow [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (b2) \\ x = a < -2 (b1) \\ x = b > 2 (b1) \\ x = 2 (b2) \\ x = -2 (b2) \end{cases}$

Kết hợp với (*) suy ra: $x = 0; x = a; x = b; x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy có 4 đường tiệm cận.

Câu 20: [Mức độ 4] Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích

của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

Do tấm tôn có diện tích bằng $4m^2$ nên $xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$

Thùng có chiều cao là 0,5m và các kích thước còn lại của thùng là: $x-1$ và $y-1$

Thể tích của thùng là $V(x) = 0,5 \cdot (x-1)(y-1) = \frac{1}{2}(x-1)\left(\frac{4}{x}-1\right) = \frac{1}{2} \frac{(x-1)(4-x)}{x}$

Suy ra: $y = \frac{1}{V(x)} = \frac{2x}{(x-1)(4-x)}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty \Rightarrow$ đường

thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng

$x=4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 21: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên $D = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

$$\text{Ta có: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x + \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$

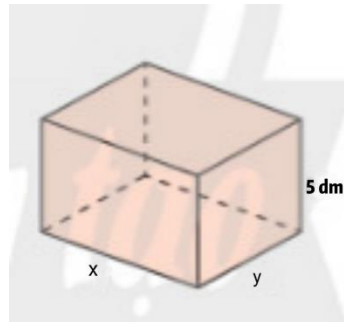
$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 3x}) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x - \sqrt{x^2 - 3x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow y = 3x - \frac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận xiên.

Câu 22: [Mức độ 4]. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Lời giải

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $0,5xy = 1 \Leftrightarrow xy = 2$

Diện tích toàn phần của bể là $S(x) = xy + 2.0,5.x + 2.0,5.y = 2 + x + \frac{2}{x}$, ($x > 0$)

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2 \Rightarrow a = 1; b = 2$

$$P = a^2 + b^2 = 5$$